Concours des 24, 25 et 26 mai 1988 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

***

MATHEMATIQUES (Option M)

Notations : Dans ce problème, on désigne par :

- C la $\mathbb{C}$- algèbre des fonctions définies sur le corps des réels $\mathbb{R}$, continues, à valeurs dans le corps des complexes $\mathbb{C}$.

- F l'ensemble des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$, à coefficients complexes, et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

- F_n la partie de F formée des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, et du polynôme nul.

Dans tout le problème, on utilise l'expression "polynôme" à la place de "fonction polynôme". On note $d^\circ P$ le degré du polynôme P. On appelle polynôme normalisé tout polynôme non nul dont le coefficient dominant est égal à 1.

Avertissement :

- Le candidat pourra admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'il ne les a pas démontrés.

PARTIE I

1. Pour tout entier naturel p, on note E_p l'ensemble des fonctions f appartenant à C, pour lesquelles il existe deux réels A et B, positifs ou nuls, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad |f(x)| \leq A + B|x|^p \qquad (1)$$

(A et B dépendent de la fonction f et de l'entier p).

a) Démontrer l'inclusion : $\forall p \in \mathbb{N} \quad , \quad E_p \subset E_{p+1}$ (2)

b) Montrer que pour tout entier naturel p, E_p est un $\mathbb{C}$- espace vectoriel. Montrer que E_p n'est pas de dimension finie.

c) Soit E la partie de C définie par : $E = \bigcup_{p=0}^{+\infty} E_p$ (3)

Montrer que E est une $\mathbb{C}$- algèbre et que E contient F.

2. Montrer que pour toute fonction f de E, l'intégrale : $I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-|x|}dx$ (4)

est convergente.

Application : calculer, pour tout entier naturel n, l'intégrale : $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-|x|}dx$ (5)

3. Montrer que l'application ϕ définie par :

$$\forall (f,g) \longmapsto^{\phi} \phi(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g(x)e^{-|x|}dx \qquad (6)$$

$$E^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

est un produit scalaire sur E.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe une base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de F_n telle que :

i) Pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n$, e_i est un polynôme normalisé de degré i (7)

ii) La base $(e_0, e_1, ..., e_n)$ est orthogonale pour le produit scalaire ϕ.

Application : $n = 5$; en remarquant que e_i est un polynôme de même parité que i, déterminer les polynômes $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$.

(On devra trouver : $e_5(X) = X^5 - \frac{220}{3}X^3 + 520X$)

5. a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, le polynôme e_n défini au 4. vérifie la propriété :

$$\forall P \in F_{n-1} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e_n(x)P(x)e^{-|x|}dx = 0 \qquad (8)$$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, le polynôme e_n a n zéros réels et simples.

Indication : on pourra utiliser le polynôme :

$$R(x) = (x - x_1)...(x - x_i)...(x - x_p) \qquad (9)$$

où les x_i sont les racines réelles d'ordre impair de e_n.

Application : calculer les zéros de e_5. On les notera x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 de sorte que :

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ (10) et on donnera des valeurs approchées des x_i à 10^{-5} près.

NB : La détermination des valeurs exactes des x_i est importante pour la suite.

6. a) Montrer qu'il existe 5 réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ tels que :

$$\forall P \in F_4 \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-|t|}dt = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i P(x_i) \qquad (11)$$

b) Démontrer les égalités : $\lambda_1 = \lambda_5 \qquad \lambda_2 = \lambda_4 \qquad (12)$

c) Calculer les valeurs exactes de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On donnera ces valeurs sous la forme : $\lambda_i = \frac{a_i + b_i\sqrt{N}}{c_i}$

où N est un entier naturel non carré, c_i un entier naturel, et a_i et b_i des entiers relatifs. (Pour le calcul, on pourra utiliser une base de F_5 convenablement choisie).

Donner des valeurs approchées des λ_i à 10^{-5} près.

d) Montrer que l'égalité *(11)* est vraie pour tout polynôme de F_9. (On pourra utiliser la propriété *(8)*).

e) Montrer que l'égalité *(11)* n'est vraie pour aucun polynôme de degré 10.

7. Pour toute fonction f de E, on pose :

$$K(f) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i f(x_i) \qquad (13)$$

a) Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in R \quad , \quad f(x) = \cos x \qquad (14)$$

Montrer qu'il existe un polynôme g de F_9 tel que : $\forall x \in R \quad , \quad |f(x) - g(x)| \leq \frac{x^{10}}{10!} \qquad (15)$

b) Démontrer l'égalité :

$$|I(f) - K(f)| \leq \frac{7}{2} \qquad (16)$$

Calculer la valeur exacte de $I(f)$, et une valeur approchée de $K(f)$ à 10^{-5} près. ($I(f)$ a été définie au 2.).

PARTIE II

1. On définit les applications N_1 et N_2 de E dans $R+$ par :

$$\forall f \in E \quad , \quad N_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| e^{-|x|} dx$$

et (17)

$$N_2(f) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-|x|} dx}$$

C'est-à-dire :

$$N_1(f) = I(|f|)$$

et (18)

$$N_2(f) = \sqrt{\phi(f,f)}$$

a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.

b) Montrer qu'il existe une constante $a > 0$ telle que :

$$\forall f \in E \quad , \quad N_1(f) \leq a N_2(f) \qquad (19)$$

Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

2. a) Soit n un entier naturel, et f une fonction de E. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P_n de F_n, tel que :

$$\forall Q \in F_n \quad , \quad N_2(f - P_n) \leq N_2(f - Q) \qquad (20)$$

et exprimer P_n en fonction des polynômes $e_0, e_1, \ldots, e_n$ introduits au I 2.

b) De même, montrer qu'il existe un polynôme T_n de F_n tel que :

$$\forall Q \in F_n \quad , \quad N_1(f - T_n) \leq N_1(f - Q) \qquad (21)$$

(On ne demande pas de montrer l'unicité).

Indication : on pourra utiliser :

$$m = \inf_{Q \in F_n} N_1(f - Q) \qquad (22)$$

3. a) Soit $(f_n)_{n \in N}$ une suite de fonctions de E convergeant uniformément sur R vers une fonction f. Montrer que f appartient à E, et que la suite $(f_n)_{n \in N}$ converge dans les espaces vectoriels normés (E, N_1) et (E, N_2).

b) Examiner les réciproques.

●●●

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail